

漸化式を含む差分方程式の解について

一昨日 冗

1 差分方程式とは

高校で習った漸化式を含んでいる一般の **2階線形差分方程式** は次式で与えられる：

$$ax_{n+1} + bx_n + cx_{n-1} = f(n), \quad (a \neq 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1)$$

ここに, a, b, c は定数で $f(n)$ は n の関数である。上の式を満たす n の関数 $x_n = \varphi(n)$ が存在するとき, それを **解** と呼ぶ。式 (1) の全ての解を求めることが目的であるが, 最初に $f(n) = 0$ である (1) の **斉次方程式** の解を考える。

$$ax_{n+1} + bx_n + cx_{n-1} = 0, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2)$$

この方程式の解は, 経験的に, 0 でないある定数 λ の n 乗になることが知られているので, 我々は解を $x_n = \lambda^n$ とおく。これを式 (2) に代入して整理すると

$$a\lambda^{n+1} + b\lambda^n + c\lambda^{n-1} = 0 \quad \longrightarrow \quad a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \quad \dots (\dagger)$$

となる。この2次方程式 (\dagger) が, もし 0 でない 2つの異なる実数根 (方程式の解は, **根** と呼ばれる) λ_1, λ_2 をもつならば, λ_1^n, λ_2^n はともに式 (2) の解である。なぜならば, $j = 1, 2$ に対して

$$a\lambda_j^{n+1} + b\lambda_j^n + c\lambda_j^{n-1} = 0$$

を満たすからである。このとき, c_1, c_2 を任意定数として

$$x_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n \quad (3)$$

も解になることが容易にわかる。なぜならば, これを式 (2) に代入すると

$$\begin{aligned} & a\{c_1\lambda_1^{n+1} + c_2\lambda_2^{n+1}\} + b\{c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n\} + c\{c_1\lambda_1^{n-1} + c_2\lambda_2^{n-1}\} \\ & = c_1\lambda_1^{n-1}\{a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c\} + c_2\lambda_2^{n-1}\{a\lambda_2^2 + b\lambda_2 + c\} = 0 \end{aligned}$$

となるからである。

2次方程式 (\dagger) は, 2階線形差分方程式の **特性方程式** と呼ばれ, 式 (3) のように任意定数を2つ含む解は斉次方程式 (2) の **一般解** と呼ばれている。

例題 1. $x_{-1} = 1, x_0 = 2, x_{n+1} = x_n + 6x_{n-1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$ を満たす数列 $\{x_n\}$ を求めよ。

解答) 特性方程式は $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$ だから, $(\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$ より, $\lambda = 3, -2$ を得る。
従って, 一般解は $x_n = c_1 3^n + c_2 (-2)^n$. $x_{-1} = 1, x_0 = 2$ より, 次の連立方程式を得る:

$$x_{-1} = \frac{c_1}{3} - \frac{c_2}{2} = 1, \quad x_0 = c_1 + c_2 = 2.$$

この連立方程式を解くと, $c_1 = \frac{12}{5}, c_2 = -\frac{2}{5}$. よって, 与式の解は $x_n = \frac{4}{5} 3^{n+1} + \frac{1}{5} (-2)^{n+1}$.

読者はこれが解であることを確かめよ。また, この方程式を高校で習った解法(階差数列の利用)で解くのはかなり難しい。 □

2 齊次方程式の一般解

特性方程式(†)の根は, 2つの異なる実数, 重根, または虚数根のいずれかの場合になる。2つの異なる実数根の場合は前節で述べたので, ここでは後者2つの場合を考えよう。

1) 重根 $p = -\frac{b}{2a}$ の場合

特性方程式は $a(\lambda - p)^2 = 0$ と同等なので, 重根 p に対して p^n は1つの解である。さて, もう1つの解 $x_n = np^n$ があることを示す。

証明. $x_n = np^n$ を式(2)に代入すると

$$\begin{aligned} & a(n+1)p^{n+1} + bnp^n + c(n-1)p^{n-1} \\ &= (n-1)p^{n-1} \{ap^2 + bp + c\} + p^n \{2ap + b\} = 0. \quad \left(p = -\frac{b}{2a} \text{ だから} \right) \end{aligned}$$

即ち, p^n と np^n は2つの独立した解(比例していない2つの異なる解)なので, c_1, c_2 を任意定数として $x_n = c_1 p^n + c_2 np^n = (c_1 + c_2 n)p^n$ が一般解になることがわかる。 □

2) 虚数根 $p \pm qi$ の場合

最初に, 虚数根は $p \pm qi = r(\cos \theta \pm i \sin \theta) = re^{\pm i\theta}$ (極形式; 下の注意参照) と書けることに注意する。特性方程式の根が虚数根 $\lambda = p + qi$ であっても, λ^n が齊次方程式(2)の解になることは前節の結果から明らかなので, $x_n = \lambda^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ を式(2)に代入したとき

$$\begin{aligned} & ar^{n+1} \{\cos(n+1)\theta + i \sin(n+1)\theta\} + br^n \{\cos n\theta + i \sin n\theta\} + cr^{n-1} \{\cos(n-1)\theta + i \sin(n-1)\theta\} \\ &= ar^{n+1} \cos(n+1)\theta + br^n \cos n\theta + cr^{n-1} \cos(n-1)\theta \\ &\quad + i \{ ar^{n+1} \sin(n+1)\theta + br^n \sin n\theta + cr^{n-1} \sin(n-1)\theta \} = 0 \end{aligned}$$

を満たさなければならない。複素数が0というのは, 実数部と虚数部がともに0のときなので次式を得る:

$$ar^{n+1} \cos(n+1)\theta + br^n \cos n\theta + cr^{n-1} \cos(n-1)\theta = 0, \quad (4)$$

$$ar^{n+1} \sin(n+1)\theta + br^n \sin n\theta + cr^{n-1} \sin(n-1)\theta = 0. \quad (5)$$

$\overline{x_n} = r^n(\cos n\theta - i \sin n\theta)$ を式(2)に代入しても, 上の2つの式が得られるのは自明である。即ち, 式(4),(5)が成り立つと言うのは $r^n \cos n\theta, r^n \sin n\theta$ がともに齊次方程式(2)の解(独立した2つの解)であるということを示している。従って, 虚数を含まない形の一般解は

$$x_n = r^n(c_1 \cos n\theta + c_2 \sin n\theta). \quad (6)$$

- 注意：1. $\cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$ (オイラーの公式, $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2.71828182845 \dots$),
 2. $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$. (ドモアブルの公式)

いままでの結果をまとめると、斉次方程式について次の定理を得る。

定理 1.

斉次方程式 $ax_{n+1} + bx_n + cx_{n-1} = 0$ ($a \neq 0$) の一般解は、特性方程式 $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ の根の種類に対応して次のようになる。

- 1) 2つの異なる実数根 λ_1, λ_2 をもつとき、一般解は $x_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n$,
 - 2) 重根 $p = -\frac{b}{2a}$ をもつとき、一般解は $x_n = (c_1 + c_2 n) p^n$,
 - 3) 虚数根 $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ をもつとき、一般解は $x_n = r^n(c_1 \cos n\theta + c_2 \sin n\theta)$,
- ここに、 c_1, c_2 は任意定数である。

例題 2. $x_{-1} = 2, x_0 = -2, x_{n+1} + 4x_n + 4x_{n-1} = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) を満たす解 x_n を求めよ。

解答) 特性方程式 $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$ より、 $\lambda = -2$ (重根) なので、一般解は $x_n = (c_1 + c_2 n)(-2)^n$.

初期条件 $x_{-1} = 2, x_0 = -2$ より、 $(c_1 - c_2)\left(-\frac{1}{2}\right) = 2, c_1 = -2$ を得るので、 $c_2 = 2$ となる。

以上より、解は $x_n = (1 - n)(-2)^{n+1}$. □

3 一般の 2 階線形差分方程式の解

2 階線形差分方程式 (1) については次の結果が成り立つ。

定理 2.

2 階線形差分方程式

$$ax_{n+1} + bx_n + cx_{n-1} = f(n), \quad (a \neq 0, n = 0, 1, 2, \dots) \tag{7}$$

の 1 つの解を $\varphi(n)$ 、一般解を y_n とする。また、斉次方程式

$$ax_{n+1} + bx_n + cx_{n-1} = 0 \tag{8}$$

の一般解を x_n とする。このとき、2 階線形差分方程式 (7) の一般解は次式で与えられる：

$$y_n = x_n + \varphi(n). \tag{9}$$

注意：式 (7) の一般解 y_n は、任意定数を 2 つ含む。なぜならば、 x_n が一般に 2 つの任意定数を含むからである。

証明. 式 (9) $y_n = x_n + \varphi(n)$ を 2 階線形差分方程式 (7) に代入すると、

$$\begin{aligned} & a\{x_{n+1} + \varphi(n+1)\} + b\{x_n + \varphi(n)\} + c\{x_{n-1} + \varphi(n-1)\} \\ &= \{ax_{n+1} + bx_n + cx_{n-1}\} + \{a\varphi(n+1) + b\varphi(n) + c\varphi(n-1)\} \\ &= 0 + f(n) \quad (\text{上の第 1 項が } 0, \text{ 第 2 項が } f(n)) \end{aligned}$$

となるので、 y_n は 2 階線形差分方程式 (7) の一般解である □

上の定理により、式 (7) の 1 つの解 $\varphi(n)$ を求めることができれば、一般解がわかることになる。1 つの解 $\varphi(n)$ は与えられた $f(n)$ の形によりその都度考えることになるが、難しいことではない。というのは、解 $\varphi(n)$ の式の形は予想することができるからである。

例題 3. 方程式 $x_{n+1} - x_n - 6x_{n-1} = f(n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) について、 $f(n)$ がそれぞれ次の関数のとき、1 つの解を求めよ。

$$(1) f(n) = 5 \qquad (2) f(n) = 2n \qquad (3) f(n) = 2^n$$

解答) (1) 右辺が定数だから、定数解 $\varphi(n) = k$ があることが予想できる。これを与式に代入すると $k - k - 6k = 5$ を満たさなければならない。この k の値は、 $k = -\frac{5}{6}$ 。従って、1 つの解は $\varphi(n) = -\frac{5}{6}$ 。

(2) 右辺が n の定数倍なので、 n の 1 次式からなる解 $\varphi(n) = an + b$ があることが予想される。これを与式に代入すると

$a(n+1) + b - (an + b) - 6\{a(n-1) + b\} = 2n \rightarrow -6an + 7a - 6b = 2n$ となるので、連立方程式: $-6a = 2, 7a - 6b = 0$ より、 $a = -\frac{1}{3}, b = -\frac{7}{18}$ を得る。従って、1 つの解は

$$\varphi(n) = -\frac{1}{3}n - \frac{7}{18}. \quad (\text{差分方程式になれていない読者は、これが 1 つの解になっていることを確かめよ})$$

(3) 右辺が 2^n なので、 $\varphi(n) = k2^n$ の形の解が予想できる。 2^n は、この斉次方程式の解ではないのでこのような予想ができる。もし、 2^n が斉次方程式の解ならば、 $\varphi(n) = k2^n$ とおくことはできない。(なぜならば、この形の $\varphi(n)$ はすでに (9) 式の x_n の中に含まれているからである)

$\varphi(n) = k2^n$ を与式に代入すると、 $k2^{n+1} - k2^n - 6k2^{n-1} = 2^n \rightarrow -2k2^n = 2^n$ 。となるので、 $k = -\frac{1}{2}$ 。従って、1 つの解は $\varphi(n) = -2^{n-1}$ である。 □

さて、2 階線形差分方程式 (7) の 1 つの解 (特別解と呼ぶこともおおい) を求める一般的な方法はないが、右辺の関数 $f(n)$ の形からおおよその形を予想できる。これを表にすると次のようになる (次ページ)。表の $f(n)$ の欄の関数は定数倍されていてもかまわない。 $\varphi(n)$ の欄は左の関数でダメなときは矢印の順番に右の関数を使えという意味である。

例題 4. 差分方程式 $x_{n+1} + x_n - 2x_{n-1} = -(-2)^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) の一般解を求めよ。

解答) $x_{n+1} + x_n - 2x_{n-1} = -(-2)^n \dots \textcircled{1}$, $x_{n+1} + x_n - 2x_{n-1} = 0 \dots \textcircled{2}$ とおく。

特性方程式は $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ だから、 $\lambda = 1, -2$ 。よって $\textcircled{2}$ の一般解は

$$x_n = c_1 1^n + c_2 (-2)^n = c_1 + c_2 (-2)^n.$$

$\textcircled{1}$ の 1 つの解を $\varphi(n) = cn(-2)^n$ とおく。(与式の右辺は $-(-2)^n$ で、この関数はすでに方程式 $\textcircled{2}$ の一般解に入っているのだから、表 1 に従いこのようにおいた。) $\varphi(n)$ を $\textcircled{1}$ 式に代入すると

$$c(n+1)(-2)^{n+1} + cn(-2)^n - 2c(n-1)(-2)^{n-1} = -(-2)^n \rightarrow -3c(-2)^n = -(-2)^n.$$

表1 特別解 $\varphi(n)$ の形

右辺 $f(n)$	特別解 $\varphi(n)$
定数	$c \rightarrow cn \rightarrow cn^2 \rightarrow$
a^n	$ca^n \rightarrow cna^n \rightarrow cn^2a^n \rightarrow$
n^k	$c_0 + c_1n + \dots + c_kn^k \rightarrow (\text{〃}) + c_{k+1}n^{k+1} \rightarrow$
n^ka^n	$(c_0 + c_1n + \dots + c_kn^k)a^n \rightarrow (\text{〃}) + c_{k+1}n^{k+1}a^n \rightarrow$
$\sin n\theta, \cos n\theta$	$c_1 \sin n\theta + c_2 \cos n\theta \rightarrow n(\text{〃}) \rightarrow n^2(\text{〃}) \rightarrow$
$a^n \sin n\theta, a^n \cos n\theta$	$(c_1 \sin n\theta + c_2 \cos n\theta)a^n \rightarrow n\{ \text{〃} \} \rightarrow n^2\{ \text{〃} \} \rightarrow$

注意：1. $c, c_j (j = 0, 1, 2, \dots)$ は定数である。これらの定数を決定することで特別解が求まる。

2. (〃) は、1 番左にある関数と同じということを示す。

3. この表は、3 階以上の線形差分方程式にも使える。即ち、特性方程式が3 次以上の場合でも適用可能。

となるので $c = \frac{1}{3}$. 従って、 $\varphi(n) = \frac{1}{3}n(-2)^n$ だから ① の一般解 y_n は

$$y_n = c_1 + c_2(-2)^n + \frac{1}{3}n(-2)^n. \quad \square$$

例題5. 差分方程式 $x_{n+1} + x_n + x_{n-1} = 2^{-n} (n = 0, 1, 2, \dots)$ の一般解を求めよ。

解答) $x_{n+1} + x_n + x_{n-1} = 2^{-n} \dots$ ①, $x_{n+1} + x_n + x_{n-1} = 0 \dots$ ② とおく。

特性方程式は $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ だから $\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = \cos \frac{2}{3}\pi \pm i \sin \frac{2}{3}\pi$. よって、② の一般解は

$$x_n = c_1 \cos \frac{2}{3}n\pi + c_2 \sin \frac{2}{3}n\pi.$$

ここで、① の1 つの解を求めよう。 $\varphi(n) = c2^{-n}$ とおいて① に代入すると、

$$c2^{-(n+1)} + c2^{-n} + c2^{-(n-1)} = 2^{-n} \rightarrow \frac{7}{2}c2^{-n} = 2^{-n}$$

だから、 $c = \frac{2}{7}$, $\therefore \varphi(n) = \frac{1}{7}2^{1-n}$. 以上より ① の一般解 y_n は

$$y_n = c_1 \cos \frac{2}{3}n\pi + c_2 \sin \frac{2}{3}n\pi + \frac{1}{7}2^{1-n}. \quad \square$$

最後に、高校の数学 B でひんぱんに扱う数列の漸化式を含んでいる [1 階線形差分方程式](#) の一般解について述べる。1 階の方程式に対する結果は非常に単純である。

定理 3.

1 階線形差分方程式とその斉次方程式がそれぞれ

$$ax_{n+1} + bx_n = f(n) \quad (a \neq 0, n = 0, 1, 2, \dots) \quad (10)$$

$$ax_{n+1} + bx_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (11)$$

で与えられているとき、方程式 (10) の一般解 x_n は、

$$x_n = c \left(-\frac{b}{a} \right)^n + \varphi(n) \quad (12)$$

である。ただし、 $\varphi(n)$ は方程式 (10) の特別解である。

証明. 式 (12) の x_n を式 (10) に代入すると

$$\begin{aligned} & a \left\{ c \left(-\frac{b}{a} \right)^{n+1} + \varphi(n+1) \right\} + b \left\{ c \left(-\frac{b}{a} \right)^n + \varphi(n) \right\} \\ &= c \left(-\frac{b}{a} \right)^n \left\{ a \left(-\frac{b}{a} \right) + b \right\} + a \varphi(n+1) + b \varphi(n) = f(n). \end{aligned}$$

となり、解であることがわかる。なお、特性方程式は $a\lambda + b = 0$ だから $\lambda = -\frac{b}{a}$ 。(注：特性方程式は 1 次で、根は 1 つ。) よって、 $c \left(-\frac{b}{a} \right)^n$ は斉次方程式 (11) の一般解である。□

例題 6. 差分方程式 $x_0 = 1, 2x_{n+1} - x_n = n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$ を満たす解を求めよ。

解答) 特性方程式の根は $\frac{1}{2}$. 与式の特別解を $\varphi(n) = kn + l$ とおいて、代入すると

$$2\{k(n+1) + l\} - (kn + l) = n \rightarrow kn + 2k + l = n$$

となるので、 $k = 1, l = -2$ を得る。従って、与式の一般解は、 $x_n = c \left(\frac{1}{2} \right)^n + n - 2$.

初期条件 $x_0 = 1$ より、 $c = 3$ なので、与式の解は $x_n = 3 \left(\frac{1}{2} \right)^n + n - 2$. □

問題

問 1. 次の線形差分方程式の解を求めよ。ただし、 $n = 0, 1, 2, \dots$ である。

$$(1) x_0 = \frac{1}{3}, \quad x_{n+1} + 2x_n = n \qquad (2) x_0 = 2, \quad 3x_{n+1} - x_n = \left(\frac{1}{3} \right)^n$$

$$(3) x_{-1} = 2, \quad x_0 = 4, \quad x_{n+1} - 6x_n + 9x_{n-1} = 8$$

$$(4) x_{-1} = 1, \quad x_0 = 1, \quad x_{n+1} - 4x_n + 4x_{n-1} = -2^n$$

問 2. 次の 2 階線形差分方程式の一般解を求めよ。ただし、 $n = 0, 1, 2, \dots$ である。

$$(1) x_{n+1} + x_n + \frac{1}{4}x_{n-1} = \left(\frac{1}{2} \right)^n \qquad (2) x_{n+1} - x_n + x_{n-1} = \sin \frac{n\pi}{2}$$

問3. 2階の斉次方程式 $x_{n+1} + ax_n + bx_{n-1} = 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) のすべての解が, $n \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束するための必要十分条件は $|a| < 1 + b < 2$ であることを示せ。

問題の答

問1. (1) $x_n = \frac{1}{9}(-2)^{n+2} + \frac{1}{3}n - \frac{1}{9}$ (2) $x_n = (2+n)\left(\frac{1}{3}\right)^n$ (3) $x_n = (2+2n)3^n + 2$.

(4) $x_n = (4 - 5n - n^2)2^{n-2}$

問2. (1) $x_n = (c_1 + c_2n)\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ (2) $x_n = c_1 \cos \frac{n\pi}{3} + c_2 \sin \frac{n\pi}{3} - \sin \frac{n\pi}{2}$

問3. (ヒント) 特性方程式 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ のすべての根が $|\lambda| < 1$ となる必要十分条件を求めればよい。 λ が実数根のときと虚数根のときを分けて考えよ。

参考図書

1. 大橋常道: 微分方程式・差分方程式入門- **Dynamical Systems** へのいざない -, コロナ社, 2007年, 1900円 (微積分を習った後で読めば, 非常に役に立つ本)
2. 大橋常道, 加藤末広, 谷口哲也: ミニマム線形代数, コロナ社, 2009年, 2000円 (線形空間の章を参照せよ)
3. S. Elaydi: **An Introduction to Difference Equations** (3rd edi.), Springer, 2005年, (1万円位) (集団生物学への応用まで考えた本格的参考書, 大学上級生用か)

(以上, 2020年6月20日)